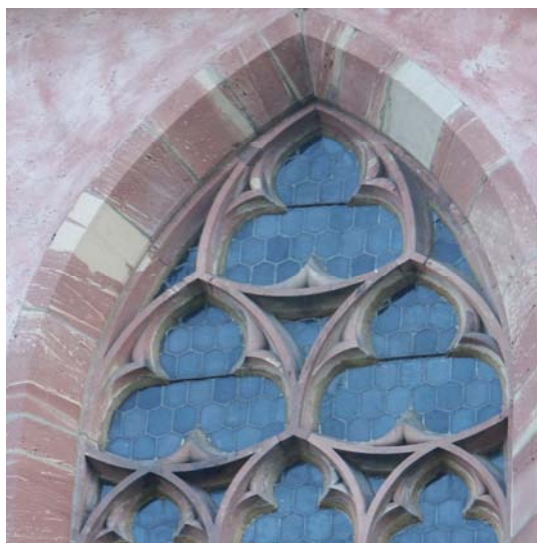
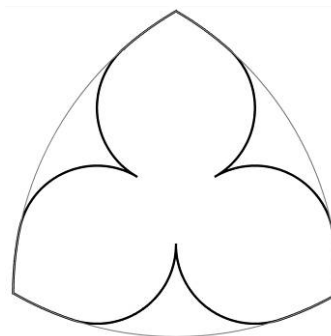


GOTICKÝ TROJLÍSTOK

Na gotických oknách často vidieť ornament trojlístka.

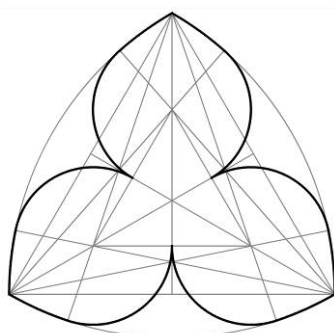


obr. 1

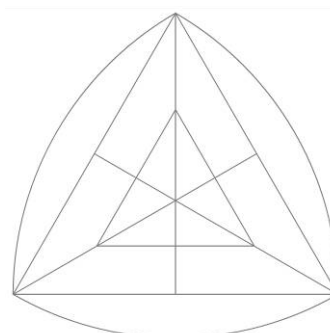


obr. 2

Aby sme trojlístok mohli narysovať, potrebujeme zostrojiť celú sieť pomocných čiar (obr. 3). Základom konštrukcie sú dva vhodne zvolené rovnostranné trojuholníky (budeme ich nazývať základné trojuholníky) a tri kružnicové oblúky (obr. 4). Stredmi kružnicových oblúkov sú vrcholy väčšieho základného trojuholníka.

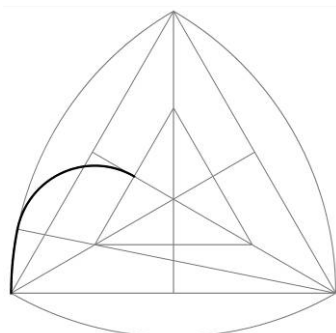


obr. 3

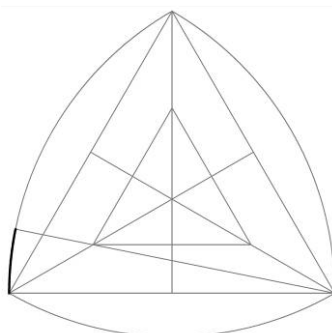


obr. 4

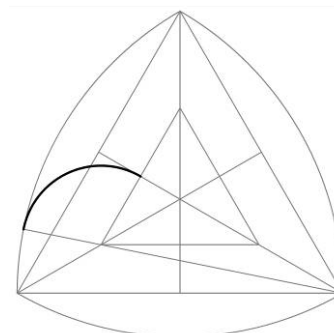
Na obr. 5 je narysovaná polovica z jedného lístka. Tá sa skladá z oblúkov dvoch kružníc. Jedna z nich má stred vo vrchole veľkého základného trojuholníka (obr. 6), druhá vo vrchole malého základného trojuholníka (obr. 7). Na obrázkoch 5 - 7 pribudla k čiaram z obr. 4 ďalšia pomocná čiara. Tá určuje miesto, v ktorom sa oblúk jednej kružnice napája na oblúk druhej kružnice.



obr. 5

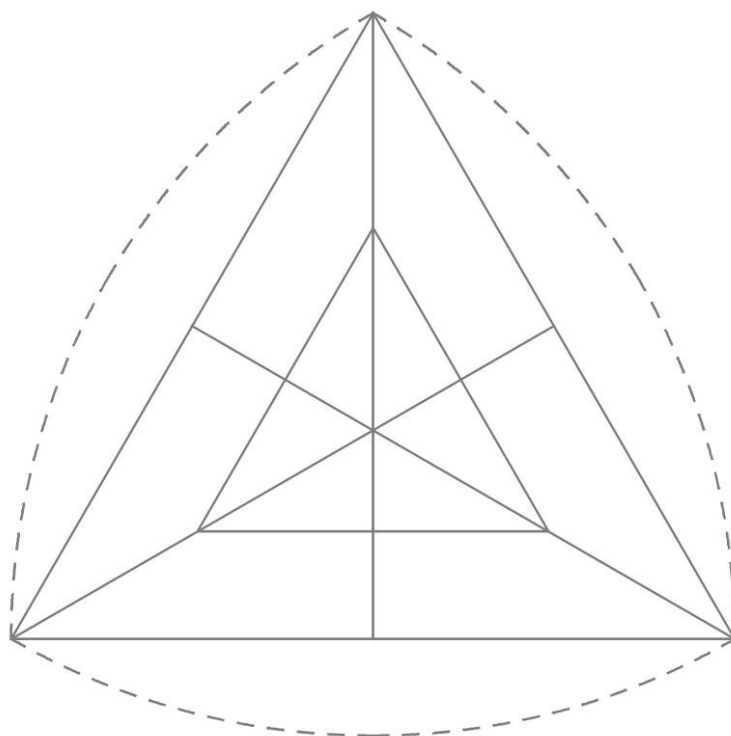


obr. 6



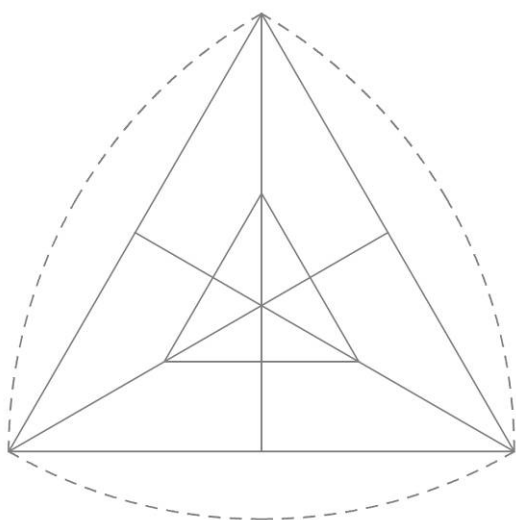
obr. 7

Úloha 1: Podľa predchádzajúceho opisu narysujte do obrázka 8 s predkreslenými čiarami gotický trojlístok.

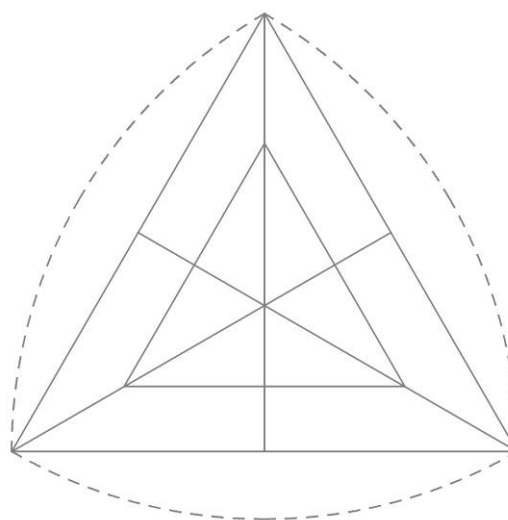


obr. 8

Romana, Svetlanu a Tomáša zaujalo vo formulácii „Základom konštrukcie sú dva vhodne zvolené rovnostranné trojuholníky“ slovo *vhodne*. Ktoré trojuholníky sú „vhodne zvolené“? Čo sa stane, ak trojuholníky nezvolíme vhodne? Rozmýšľali, čo by sa stalo s trojlístkom, keby vnútorný z dvoch základných trojuholníkov zmenšili (ako na obrázku 9) alebo zväčšili (ako na obrázku 10).



obr. 9



obr. 10

Zistili, že v jednom prípade by sa čiary tvoriace dva susedné lístky vôbec nespojili. V druhom by sa tieto čiary síce pretli, ale nie v strede strany menšieho trojuholníka, ako je to v trojlístku z úlohy 1 (pozri obr. 3). Vznikol by trojlístok, ktorý by bol „tlstejší“.

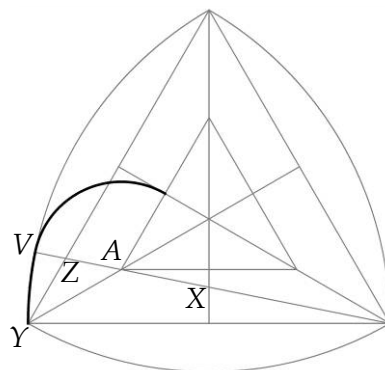
Úloha 2: Do obrázkov 9 a 10 dorysujte časť trojlístka tak, aby bolo vidieť, ktorá z opísaných dvoch situácií nastane, keď vnútorný trojuholník zväčšíme, a ktorá, keď ho zmenšíme. Svoje zistenia potom doplňte do textu v odpovedi.

Odpoveď: Ak vnútorný trojuholník zmenšíme,

 Ak vnútorný trojuholník zväčšíme,

Tieto pokusy Romana, Svetlanu a Tomáša presvedčili, že rozmery veľkého a malého trojuholníka nemožno voliť náhodne. Začali skúmať, ako súvisia malý a veľký trojuholník.

Úloha 3: Na obrázku 3 je vidieť, že čiary ohraničujúce dva susedné lístky sa stretávajú v strede strany menšieho základného trojuholníka. To nastane len vtedy, keď jedna z úsečiek AX , AY , AV , AZ na obrázku 11 má rovnakú dĺžku ako polovica strany menšieho trojuholníka. Ktorá z uvedených úsečiek musí mať túto dĺžku a prečo?



obr. 11

Odpoveď: Dĺžku polovice strany menšieho trojuholníka musí mať úsečka

Zdôvodnenie:

Roman, Svetlana a Tomáš chceli zistiť, ako sa zostrojí dvojica vhodných trojuholníkov. Na druhý deň Tomáš víťazoslávne oznámil Romanovi: „Už to mám! Viem k danej strane malého trojuholníka skonštruovať stranu veľkého trojuholníka.“ Roman si od neho vypýtal postup konštrukcie. Ten znel:

1. Narysujem stranu menšieho trojuholníka. Jej dĺžku označím y .
2. Narysujem štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky $3y$.
3. Na uhlopriečke AC narysujem bod X tak, aby dĺžka úsečky AX bola štvrtinou dĺžky uhlopriečky AC .
4. Na úsečke XC narysujem bod Y tak, aby úsečka XY mala dĺžku y .

Potom dĺžka úsečky AY je dĺžkou strany veľkého trojuholníka.

Úloha 4: Roman netušil, ako Tomáš na svoj postup prišiel. Napadlo mu však, ako ho otestovať: zvolil za y dĺžku strany menšieho trojuholníka z obrázka 8. Napíšte, ako Roman pomocou obrázka 8 môže testovať správnosť Tomášovej konštrukcie. Potom svoj návrh realizujte.

Odpoveď: Čo má urobiť Roman:

.....

.....

Kontrola dopadla pre Tomáša priaznivo. Romana preto zaujímalo, ako Tomáš objavil riešenie. Ten sa dlho vykrúcal, ale napokon musel s pravdou von: „Svetlana mi povedala, že strana veľkého trojuholníka má dĺžku $\left(\frac{\sqrt{18}}{4} + 1\right) \cdot y$. Neviem, odkiaľ to má. Celé, čo som urobil ja, je, že som vymyslel, ako pre dané y skonštruovať úsečku dĺžky $\left(\frac{\sqrt{18}}{4} + 1\right) \cdot y$.“

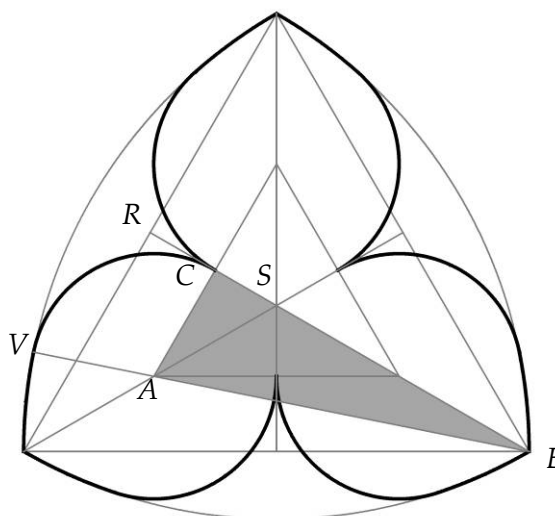
Úloha 5: Overte, že úsečka AY skonštruovaná podľa Tomášovho postupu má skutočne dĺžku $\left(\frac{\sqrt{18}}{4} + 1\right) \cdot y$.

Zdôvodnenie:

Je zrejmé, že teraz je rad na Svetlane. Ako objavila, že strana veľkého trojuholníka má dĺžku $\left(\frac{\sqrt{18}}{4} + 1\right) \cdot y$? Svetlana sa na rozdiel od

Tomáša nedala dlho prosiť: „Ale pozor, chlapci, chvíľku to potrvá. Najprv som si všimla, že trojuholník ABC (na obrázku 12) je pravouhlý. Dĺžky všetkých jeho strán možno vyjadriť pomocou dĺžok strán malého a veľkého základného trojuholníka. Tie som označila y, a :

- $|AC| = \frac{y}{2}$,
- $|AB| = |VB| - |VA| = a - \frac{y}{2}$,
- $|BC| = |CS| + |SB|$, pritom CS je tretina ťažnice malého základného trojuholníka a SB dve tretiny ťažnice veľkého základného trojuholníka.



obr. 12

Potom som si napísala Pytagorovu vetu pre trojuholník ABC . Dosadila som a po úprave som dostala rovnicu

$$8a^2 - 16ay - y^2 = 0.$$

Úloha 6: Vyjadrite dĺžku strany BC pomocou a, y . Potom v Pytagorovej vete pre trojuholník ABC vyjadrite dĺžky strán pomocou a, y . Napokon skontrolujte, že po úpravách dostanete rovnakú rovnicu ako Svetlana.

Odpoveď: Pre dĺžku strany BC platí: $|BC| = \dots\dots\dots$

Výpočet (Pytagorova veta a Svetlanina rovnica):

Svetlana pokračovala: „Otec videl, ako sa trápim s rovnicou

$$8a^2 - 16ay - y^2 = 0. \quad (*)$$

Poradil mi, aby som ju zapísala šikovnejšie:

$$8(a - y)^2 = 9y^2. \quad (**)$$

Teraz stačilo obidve strany odmocniť

$$\sqrt{8}(a - y) = 3y,$$

a potom už nebolo ťažké vyjadriť a pomocou y .

Úloha 7: Skontrolujte, že rovnica $(**)$ je skutočne len inak zapísaná Svetlanina rovnica $(*)$. Potom z rovnice $\sqrt{8}(a - y) = 3y$ vyjadrite číslo a pomocou čísla y . Napokon skontrolujte, že a , ktoré ste dostali, je rovnaké ako a , ktoré používal

Tomáš, teda $\left(\frac{\sqrt{18}}{4} + 1\right) \cdot y$.



Zdôvodnenie (rovnica $(**)$ je len inak zapísaná Svetlanina rovnica $(*)$):

Výpočet (vyjadrenie čísla a pomocou čísla y):

Výpočet (číslo a z predchádzajúceho výpočtu a Tomášova hodnota sú rovnaké):